Apprendre son cours: chapitre polynômes

1) Donner la définition du degré d'un polynôme, d'un polynôme unitaire, du coefficient dominant. cf cours

2) Quels sont les polynômes P tels que $P(X) = P(2X)$?

Si on écrit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, on a $\sum_{k=0}^{n} a_k X^k = \sum_{k=0}^{n} a_k (2X)^k = \sum_{k=0}^{n} a_k 2^k X^k$; or deux polynômes égaux ont des coefficients égaux donc pour tout $k \in [\![0,n]\!]$ $a_k = 2^k a_k$, donc si $k \neq 0$, $a_k = 0$; seuls les polynômes constants conviennent; réciproquement, on vérifie bien que les polynômes constants sont solutions.

3) Peut-on trouver un polynôme de degré 2 tel que $P(1) = P(2)$?

On cherche $P = aX^2 + bX + c$, $a \neq 0$, $P(1) = a+b+c$, $P(2) = 4a+2b+c$, on a donc $4a+2b+c = a+b+c$ et $a \neq 0$; on a par ex a=1, b=-3, c=0, soit $P = X^2 - 3X$

4) Peut-on trouver un polynôme de degré 2 tel que $P(1) = P(2) = P(3)$?

On ajoute $P(3) = 9a+3b+c$ donc un système

$$\begin{cases} 4a+2b+c = a+b+c \\ 9a+3b+c = a+b+c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a+b=0 \\ 8a+2b=0 \end{cases}$$ $\Leftrightarrow a = b = 0$, or on doit avoir $a \neq 0$, ce n'est donc pas possible.

5) Peut-on trouver un polynôme de degré 1 tel que $P(1) = P(2) = P(3)$?

On pose $P = aX + b$, $a \neq 0$; on a les conditions $a+b = 2a+b = 3a+b$, impossible si $a \neq 0$.

6) Déterminer la dérivée k-ième du polynôme $P = X^n$

On prouve par récurrence que $P^{(k)} = \dfrac{n!}{(n-k)!} X^{n-k}$

7) Trouver tous les polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$ tels que $P(X^2) = (P(X))^2$

On cherche $P = aX^2 + bX + c$, on a donc
$aX^4 + bX^2 + c = a^2X^4 + 2abX^3 + (2ac + b^2)X^2 + 2bcX + c^2$; on identifie les coefficients et on a :
$a^2 = a, 2ab = 0, 2ac + b^2 = b, 2bc = 0, c^2 = c$. Et on discute:
si $a = 1$, on a $b = c = 0$, on trouve le polynôme $P = X^2$, on vérifie qu'il est bien solution.
si $a = 0$, on a $b^2 = b, 2bc = 0, c^2 = c$; si $b = 1$, alors $c = 0$ et si $b = 0$, alors $c = 0$ ou $c = 1$; on trouve donc les polynômes $P = X$, $P = 1$ et $P = 0$, et on vérifie que ces polynômes sont bien solutions!

8) Soit P un polynôme de degré n. Quel est le degré de $Q(X) = P(X^3 + 1)$? De $S(X) = (P(X))^2$?

deg(Q) = 3n et deg(S)= 2n

9) Citer la formule de Taylor. cf cours

10) Quel est le reste de la division d'un polynôme P par $X - 1$? cf cours: c'est $P(1)$

11) Effectuer la division euclidienne de $A(X) = X^4 - 3X^3 + X$ par $B(X) = X^2 + X$.

Le quotient est $Q = X^2 - 4X + 4$, le reste $R = -3X$

12) Quels sont les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$? cf cours

13) Quels sont les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ n'ayant aucune racine réelle? Des polynômes qui s'écrivent comme produit de polynômes de degré 2 à discriminant négatif.

14) Que peut on dire des racines d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$? Pas grand chose. Bon si le degré de P est impair, P a au moins une racine réelle; aussi le nombre de racines est au maximum égal au degré.

15) Donner la définition de x_0 est racine d'ordre 3 du polynôme P. Comment peut-on le prouver avec ses dérivées?

On a alors $P=(X-x_0)^3 Q$ avec $Q(x_0)\neq 0$; ceci équivaut à $P(3)=P'(3)=P''(3)=0$ et $P'''(3)\neq 0$

16) Mêmes questions avec x_0 est racine d'ordre au moins 3 du polynôme P.

On a alors $P=(X-x_0)^3 Q$; ceci équivaut à $P(3)=P'(3)=P''(3)=0$.

17) Factoriser le polynôme $P=X^4+X^2+1$ dans $\mathbb{R}[X]$.

$P=(X^2+1)^2-X^2=(X^2+X+1)(X^2-X+1)$, ces deux polynômes sont bien irréductibles

18) Factoriser le polynôme $Q=X^4+1$ dans $\mathbb{R}[X]$.

$P=(X^2+1)^2-2X^2=(X^2+\sqrt{2}X+1)(X^2-\sqrt{2}X+1)$, ces deux polynômes sont bien irréductibles

19) Si P un polynôme de degré n, alors $P^{(n)}$ est un polynôme constant. Vrai ou faux? Vrai si n est un entier, ce qui est sous entendu: on perd un degré exactement à chaque fois qu'on dérive, on peut même dire que c'est un polynôme constant t non nul.

20) Si P un polynôme de degré n, alors P' est un polynôme de degré $n-1$. Vrai ou faux? Vrai si n entier

21) Soit $P\in\mathbb{R}[X]$: deg(P) = $n \Leftrightarrow P^{(n)}\neq 0_{K[X]}$ et $P^{(n+1)}=0_{K[X]}$. Vrai ou faux? Vrai cf ci-dessous

22) Soit P un polynôme de monôme dominant $a_n X^n$; que vaut $P^{(n)}$? $P^{(n)}=n!a_n$

23) Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ périodique (ie il existe un réel T tel que $P(X+T)=P(X)$. Montrer que P est un polynôme constant.

On a par récurrence immédiate pour tout n entier $P(nT)=P(0)$, or si P n'est pas constant on a $\lim_{x\to\infty} P(x)=\pm\infty$ ce qui contredit $\lim_{n\to\infty} P(nT)=P(0)$,

24) Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tel que $P(X+1)=P(X)$. Montrer que P est un polynôme constant. C'est la question 23 avec T=1